Enseignant: Mathieu Huruguen
Algèbre linéaire - CMS
16 juin 2023
Durée : 105 minutes

X

Contrôle 4 (corrigé)

SCIPER : **XXXXXX**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 8 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre **carte d'étudiant.e** sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout **outil électronique** est **interdite** pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix unique**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen

ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen

Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque énoncé proposé, plusieurs questions sont posées. Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Enoncé

On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,,\ (x, y, z) \to (2x - 7y + 5z, -4x + 3y - 4z, -11x + 16y - 14z)\,.$$

Question 1 *(1 point)* Parmi les éléments suivants de $\mathbb{R}^3$, un seul est vecteur propre de f. Lequel ?

- ☐ $(1, 0, 1)$
- ☐ $(0, 1, 1)$
- ■ $(1, 0, -1)$
- ☐ $(-1, 1, 0)$

Question 2 *(2 points)* Combien f possède-t-elle de valeur(s) propre(s) ?

- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 0
- ■ 1

Question 3 *(2 points)* Parmi les affirmations suivantes, une seule est vraie. Laquelle ?

- ☐ f est diagonalisable
- ☐ f n'est pas diagonalisable, mais elle est diagonalisable par blocs
- ■ f n'est pas diagonalisable par blocs
- ☐ f est diagonalisable, mais elle n'est pas diagonalisable par blocs

Enoncé

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^5$ on donne :

$$v_1 = (-4, 4, -1, -2, 3)\,,\ v_2 = (5, -9, 4, 1, -1)\,,\ v_3 = (1, -5 - 2\alpha, 3 + \alpha, -1, 2 + \alpha),$$

où v_3 dépend du paramètre réel $\alpha \in \mathbb{R}$. On donne aussi le sous-espace vectoriel :

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 - x_3 + x_5 = 0\}.$$

Question 4 *(1 point)* Pour combien de valeur(s) de α a-t-on l'inclusion : $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3) \subset V$?

- ■ une infinité
- ☐ 0
- ☐ 1
- ☐ 2

Question 5 *(2 points)* Pour combien de valeur(s) de α la famille v_1, v_2, v_3 est-elle liée ?

- ☐ 2
- ■ 1
- ☐ une infinité
- ☐ 0

Question 6 *(2 points)* Pour combien de valeur(s) de α la famille v_1, v_2, v_3 est-elle génératrice de V ?

- ■ 0
- ☐ une infinité
- ☐ 2
- ☐ 1

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Sauf mention explicite du contraire, votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 7: *Cette question est notée sur 6 points.*

0 .5 1 .5 2 .5 3 .5 4 .5 5 .5 6

On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \to (-x + 27y - 85z, 3x - 81y + 255z, x - 27y + 85z)$$

dont on note A la matrice en base canonique.

(a) L'application f est-elle diagonalisable ? Si oui, en donner une base propre.

(b) Montrer que le sous-ensemble de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ suivant :

$$W = \{B \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) \mid AB = 3B\}$$

est un sous-espace vectoriel et en déterminer une famille génératrice (finie).

(c) Représenter sur un croquis ci-dessous les sous-espaces propres de f ainsi qu'un point (x, y, z) et son image $f(x, y, z)$ par f.

Solution

(a) Commençons par écrire la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 27 & -85 \\ 3 & -81 & 255 \\ 1 & -27 & 85 \end{pmatrix}.$$

Ses trois lignes (ou ses trois colonnes) sont deux-à-deux proportionnelles : elle est de rang 1. Par ailleurs, elle est de trace 3. On sait alors que f est diagonalisable et que ses sous-espaces propres sont :

$$\operatorname{Ker} f \text{ et } \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker}(f - 3\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}).$$

Ecrivons alors la décomposition :

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -27 & 85 \end{pmatrix}.$$

La base suivante de $\mathbb{R}^3$ est donc propre pour f:

$$\mathcal{B} = \underbrace{(-1,3,1)}_{\text{base de } \operatorname{Im} f}, \underbrace{(27,1,0),(85,0,-1)}_{\text{base de } \operatorname{Ker} f}.$$

Dans cette base on a en fait :

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Le sous-ensemble W contient la matrice nulle. Par ailleurs, donnons-nous B et C deux éléments de W, c'est-à-dire deux matrices 3×3 vérifiant :

$$AB = 3B \quad \text{et} \quad AC = 3C.$$

Donnons-nous aussi un réel $\lambda \in \mathbb{R}$ et posons $D = B + \lambda C$. On obtient alors :

$$AD = A(B + \lambda C) = AB + \lambda AC = 3B + 3\lambda C = 3(B + \lambda C) = 3D.$$

Autrement dit, D appartient à W. Ceci achève de montrer que W est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. Pour identifier une famille génératrice de W, analysons un peu plus la condition :

$$AB = 3B.$$

Celle-ci signifie en fait que chacune des colonnes de B est une "colonne propre" de A pour la valeur propre 3. Autrement dit, au vu des résultats du (a), que chacune des colonnes de B est multiple scalaire de la colonne :

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

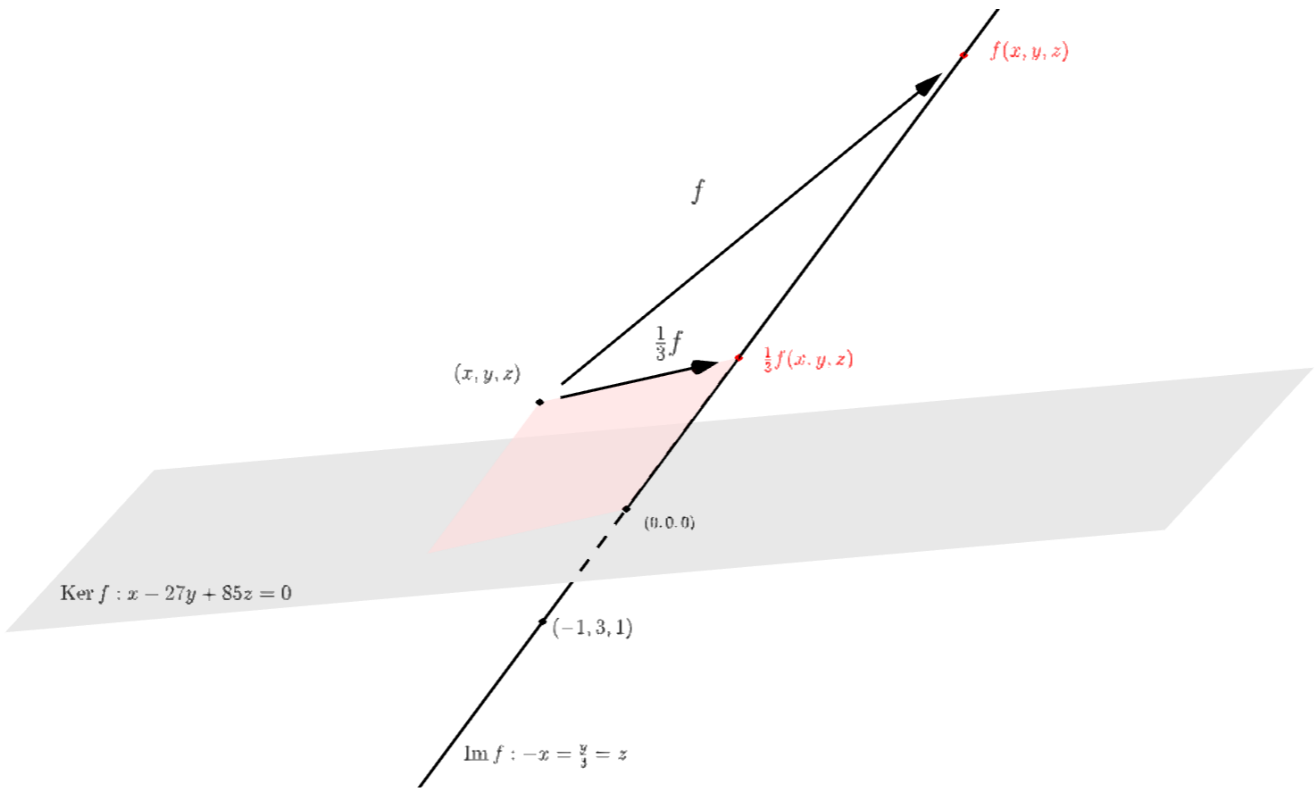
La forme générale d'une telle matrice B est donc :

$$B = \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta & -\gamma \\ 3\alpha & 3\beta & 3\gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La famille suivante est donc génératrice de W:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Voici un dessin représentant les sous-espaces propres de f ainsi qu'un point (x, y, z) et son image $f(x, y, z)$ par f :



Question 8: *Cette question est notée sur 9 points.*

.5 .5 .5 .5 .5 .5 .5 .5 .5

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, on donne les deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -8 & 10 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & -10 & 15 \\ 5 & 11 & -15 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

On note aussi $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ les applications linéaires de matrices respectives A et B en base canonique.

(a) Déterminer la nature géométrique de g et ses éléments caractéristiques.

(b) Montrer que le plan vectoriel $\operatorname{Im} g$ est stable par f. En déduire une valeur propre de f.

(c) Déterminer une base $\mathcal{B}$ telle que la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$, que l'on calculera, est diagonale par blocs.

(d) Dans l'espace vectoriel $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, déterminer si la famille :

$$A,\ A^2,\ B,\ I_3 - B$$

est libre ou liée. *Indication : on pourra utiliser les résultats du (c) et calculer la matrice* $[g]_{\mathcal{B}}$.

Solution

(a) Commençons par calculer la matrice :

$$I_3 - B = \begin{pmatrix} 5 & 10 & -15 \\ -5 & -10 & 15 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Comme on trouve une matrice de rang 1 et de trace 1, on peut conclure que g est la projection sur $\operatorname{Im} g$ parallèlement à $\operatorname{Ker} g$, où:

$$\underbrace{\operatorname{Im} g : x + 2y - 3z = 0}_{\operatorname{Ker}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} - g)} \qquad \text{et} \qquad \underbrace{\operatorname{Ker} g = \operatorname{Vect}((5, -5, -2))}_{\operatorname{Im}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} - g)}.$$

(b) Le calcul :

$${}^tA \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -3 \\ -8 & 0 & -4 \\ 10 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

montre deux choses. La première, c'est que le plan vectoriel $\operatorname{Im} g$, qui a pour équation $x + 2y - 3z = 0$ est bien stable par f. La deuxième, c'est que 2 est valeur propre de la matrice ${}^tA$, et donc aussi de la matrice A.

(c) Ce qu'il nous manque pour diagonaliser f par blocs, c'est un vecteur propre qui n'appartienne pas au plan vectoriel d'équation $x + 2y - 3z = 0$. Or on a trouvé une valeur propre de f au (b), à savoir 2. Cherchons alors le sous-espace propre associé. Pour cela, commençons par calculer la matrice :

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -5 & -8 & 10 \\ -2 & -2 & 4 \\ -3 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

puis résolvons le système homogène associé :

$$(x, y, z) \in \operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -5x - 8y + 10z = 0 \\ -2x - 2y + 4z = 0 \\ -3x - 4y + 6z + z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -5x - 8y + 10z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ -3x - 4y + 6z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \cdots$$

$$\cdots \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -3y = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2z \\ y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad (x, y, z) = z(2, 0, 1).$$

On contrôle alors facilement que le vecteur propre de f que l'on vient d'identifier, à savoir $(2, 0, 1)$, n'appartient pas au plan vectoriel $\operatorname{Im} g$, puisque:

$$2 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = -1 \neq 0.$$

Dans la base :

$$\mathcal{B} = \underbrace{(2, -1, 0), (3, 0, 1)}_{\text{base de } \operatorname{Im} g \,:\, x+2y-3z=0}, \underbrace{(2, 0, 1)}_{\notin \operatorname{Im} g}$$

la matrice de f est bien diagonale par blocs. Passons au calcul de cette matrice :

$$\begin{cases} f(2, -1, 0) = (2, -4, -2) = 4(2, -1, 0) - 2(3, 0, 1) \\ f(3, 0, 1) = (1, -2, -1) = 2(2, -1, 0) - (3, 0, 1) \\ f(2, 0, 1) = (4, 0, 2) = 2(2, 0, 1) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad [f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(d) Comme suggéré par l'indication, commençons par calculer la matrice $[g]_{\mathcal{B}}$, où $\mathcal{B}$ est la base que l'on a définie au (c). On trouve:

$$\begin{cases} g(2, -1, 0) = (2, -1, 0) \\ g(3, 0, 1) = (3, 0, 1) \\ g(2, 0, 1) = (7, -5, -1) = 5(2, -1, 0) - (3, 0, 1) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad [g]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On montre alors que la famille $A, A^2, B, I_3 - B$ est libre. Pour cela, écrivons une relation de dépendance linéaire entre ces trois matrices :

$$\alpha A + \beta A^2 + \gamma B + \delta(I_3 - B) = 0.$$

En multipliant à gauche par P^{-1} et à droite par P, où P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}$, on trouve:

$$\alpha P^{-1}AP + \beta \underbrace{P^{-1}A^2P}_{(P^{-1}AP)^2} + \gamma P^{-1}BP + \delta \underbrace{P^{-1}(I_3 - B)P}_{I_3 - P^{-1}BP} = 0$$

ou, autrement dit :

$$\alpha \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 12 & 6 & 0 \\ -6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le coefficient en haut à droite force $\gamma = \delta$. De plus, le coefficient sur la première ligne et la deuxième colonne force à ce que $\alpha = -3\beta$. En intégrant ces deux égalités, la relation ci-dessus devient :

$$\beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

d'où l'on déduit aisément que β et γ sont nuls. Il n'y a que la relation triviale entre les éléments de la famille étudiée : cette famille est donc bien libre.